UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS IV (MA-2115)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

10 de marzo de 2017

Criterios de Convergencia, Conjunto de Convergencia, Serie de Maclaurin, Curvas Ortogonales

Resolución Segundo Parcial 2012 Septiembre-Diciembre Tipo B

1. *a*) Determine si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{n^3+1}$$

converge absolutamente, condicionalmente o diverge.

Puesto que

$$\frac{n}{n^3+1}$$

tiene un término n en el numerador y un término n^3 en el denominador, la expresión debería comportarse de la forma $1/n^2$ a medida que $n \to \infty$. Por ende, no es descabellado que la serie converga absolutamente. Consideremos entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{n^3+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}.$$

Es fácil ver que

$$0 < \frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}, \quad n > 0.$$

Usando esto, podemos concluír que

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Finalmente, y según el criterio de comparación, la conocida convergencia de

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

implica la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1},$$

y por tanto la convergencia absoluta de

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{n^3+1}.$$

b) Decida si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!6^{n+1}}$$

converge o diverge.

Es importante observar que el sumando de la serie es una fracción, cuyo denominador crece de forma notablemente rápida. Sin embargo, si recordamos que la expansión de Maclaurin de e^x viene dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

y además que ésta es absolutamente convergente para todo x, entonces para el caso particular

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

también es absolutamente convergente. Usando este hecho, y además que

$$0 < \frac{1}{n!6^{n+1}} < \frac{1}{n!}, \quad n \geq 0$$

podemos concluír que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!6^{n+1}} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Finalmente, según el criterio de comparación, como la serie de e^1 converge, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!6^{n+1}}$$

también converge.

c) Estudie la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^4+1)}.$$

Consideremos de ahora en adelante la cola de la serie, comenzando en $n = 3$. Puesto que $\ln(n)$ es positiva y monótonamente creciente para $n \geq 3$, tenemos que

$$\ln(n^5) = 5\ln(n) > \ln(n^4+1), \quad n \geq 3,$$

y por tanto,

$$0 < \frac{1}{5} \frac{1}{n \ln(n)} < \frac{1}{n \ln(n^4+1)}.$$

Veamos ahora que, dado que

$$\frac{1}{5} \frac{1}{n \ln(n)} > 0$$

y mononótamente decreciente en particular para $n \geq 3$, podemos aplicar el criterio integral a la serie. Tomemos

$$\frac{1}{5} \int_3^{\infty} \frac{1}{z \ln(z)} dz.$$

Ahora, si $u = \ln(z)$, $C = \ln(3)$, la integral resulta

$$\frac{1}{5} \int_C^{\infty} \frac{1}{u} du.$$

Esta integral es de conocida divergencia. Por lo tanto, la divergencia de la integral implica la divergencia de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^5)},$$

y como consecuencia, según el criterio de comparación, la divergencia de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^4+1)}.$$

2. Representar en serie de potencias alrededor del punto $x = 0$ la función

$$f(x) = \frac{1}{4x - 3 - x^2}.$$

De inmediato vemos que el denominador puede factorizarse como $-(x-1)(x-3)$. Entonces

$$f(x) = \frac{1}{4x - 3 - x^2} = -\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-3}.$$

Cada una de estas fracciones puede arreglarse como la suma de una serie geométrica. En particular,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

y

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}\frac{1}{1-(x/3)} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}, \quad |x| < 3.$$

Por ende,

$$f(x) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - 1\right) x^n, \quad |x| < 1$$

Finalmente, esta es la serie de potencias de $f(x)$ alrededor de $x = 0$.

3. Determine el conjunto de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n}.$$

Veamos que la serie de potencias está centrada en $x = 3/2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-3/2)^n}{n}.$$

Ahora, podemos aplicar el criterio de la raíz para hallar un intervalo de convergencia absoluta.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n(x-3/2)^n}{n} \right|^{1/n} = 2|x-3/2| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}}.$$

Pero como

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1,$$

entonces

$$2|x-3/2| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = 2|x-3/2|.$$

Por ende, según el criterio de la raíz, basta con tomar

$$|x - 3/2| < \frac{1}{2}$$

tal que la serie sea absolutamente convergente. Ahora, para determinar por completo el conjunto de convergencia aún falta verificar la convergencia en $|x - 3/2| = 1/2$. Tomando $(x - 3/2) = 1/2$ obtenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que es la serie armónica, pero comenzando desde 1. Esta serie es de conocida divergencia, y por tanto la serie de potencias no converge para $(x - 3/2) = 1/2$. Tomando en cambio $(x - 3/2) = -1/2$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que es la serie armónica alternada, pero comenzando en 1. Esta serie es de conocida convergencia, y por ello la serie de potencias converge para $(x - 3/2) = -1/2$. Finalmente el conjunto de convergencia para la serie de potencias resulta $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/2 \leq x - 3/2 < 1/2\}$.

4. Determine la ecuación del haz de trayectorias ortogonales a la familia de curvas $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$.

Cualquier función y que satisfaga

$$4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$$

también satisface

$$4y' + 2x + 2Ce^{2y}y' = 0.$$

De aquí que entonces la pendiente de y en un punto x pueda escribirse como

$$y'(4 + 2Ce^{2y}) + 2x = 0, \qquad y' = -\frac{x}{2 + Ce^{2y}}.$$

En particular, una curva u que intersecte a y de forma ortogonal en x satisface

$$u' = -\frac{1}{-\frac{x}{2+Ce^{2u}}} = \frac{2 + Ce^{2u}}{x}.$$

Esta es una ecuación diferencial separable. Agrupando los términos, vemos que

$$\frac{1}{2 + Ce^{2u}} du = \frac{1}{x} dx,$$

y ésta ecuación puede ser integrada directamente. La integral del miembro derecho es $\ln(x)$, mientras que la del miembro izquierdo puede calcularse mediante

$$\int \frac{1}{2 + Ce^{2u}} du = \int \frac{e^{-2u}}{2e^{-2u} + C} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{2z + C} dz, \quad z = e^{-2u}$$

$$= -\frac{1}{4} \ln(2z + C) = -\frac{1}{4} \ln(2e^{-2u} + C),$$

donde se ha escogido como cero a la constante de integración. Entonces, obtenemos

$$-\frac{1}{4} \ln(2e^{-2u} + C) = \ln(x), \quad x > 0.$$

Exponenciando ambos miembros,

$$(2e^{-2u} + C)^{-1/4} = x,$$

y, finalmente, la familia de curvas u ortogonales a y tales que $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$ resulta

$$x^4(2e^{-2u} + C) = 1.$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Septiembre-Diciembre del 2012 (tipo B), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com